Rozwiąż metodą graficzną oraz metodą simpleks następujące zadania PL:
(zastosuj standardowe warunki brzegowe)

a)

$$x + y \to \max$$
$$x + 2y \geq 10$$
$$x + y \geq 5$$

b)

$$10x_1 + 15x_2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \geq 10$$
$$x_1 + x_2 \leq 20$$
$$2x_1 + 4x_2 \geq 25$$

c)

$$4x + 5y \to \max$$
$$x + 2y \leq 10$$
$$2x + y \leq 8$$

Na następnej stronie zaprezentowane są częściowe lub całkowite rozwiązania.

Rozwiązania (tablice simpleks):

a) **ROZWIĄZANIE:**

Najpierw zapisujemy postać kanoniczną:

$$x + y - Mt_1 - Mt_2 + 0s_1 + 0s_2 \rightarrow \max$$
$$x + 2y + t_1 - s_1 = 10$$
$$x + y + t_2 - s_2 = 5$$
$$x, y, t_1, t_2, s_1, s_2 \geq 0$$

1. tablica simpleks:

x^B	c_j	1	1	$-M$	0	$-M$	0	WNB	KRYT. WYJ.
		x	y	t_1	s_1	t_2	s_2		
t_1	$-M$	1	2	1	-1	0	0	10	5
t_2	$-M$	1	1	0	0	1	-1	5	5
c_j-z_j		$1+2M$	$1+3M$	0	$-M$	0	$-M$		

W tablicy są zmienne, którym odpowiada dodatni współczynnik optymalności c_j-z_j, zatem nie osiągnięto maksimum. Największy współczynnik optymalności wynosi 1+3M, co oznacza że należy wprowadzić do bazy zmienną *y*. Kryteria wyjścia są równe 5 dla obu zmiennych, co nie rozstrzyga która zmienna wychodzi z bazy. Wybierzemy zatem zmienną o niższym numerze jaką jest t_1 (nie byłoby błędem wybrać t_2).
Reasumując: do bazy wchodzi y na miejsce t_1.

2. tablica simpleks:

x^B	c_j	1	1	$-M$	0	$-M$	0	WNB	KRYT. WYJ.
		x	y	t_1	s_1	t_2	s_2		
y	1	0,5	1	0,5	-0,5	0	0	5	10
t_2	$-M$	0,5	0	-0,5	0,5	1	-1	0	0
c_j-z_j		$0,5+0,5M$	0	$0,5-1,5M$	$0,5+0,5M$	0	$-M$		

Rozwiązanie w dalszym ciągu nie jest optymalne, gdyż są zmienne, którym odpowiada dodatni współczynnik optymalności.
Największe wartości odpowiadają zmiennym x i s_1, a więc tym razem to kryterium nie rozstrzyga. Wybierzemy zmienną *x* (pierwszą spośród dwu o jednakowych współczynnikach optymalności). Kryterium wyjścia jest najniższe dla zmiennej t_2 a więc ta zmienna opuści bazę. Reasumując: zmienna *x* wchodzi na miejsce t_2.

3. tablica simpleks:

x^B	c_j	1	1	$-M$	0	$-M$	0	WNB	KRYT. WYJ.
		x	y	t_1	s_1	t_2	s_2		
y	1	0	1	1	-1	-1	1	5	5
x	1	1	0	-1	1	2	-2	0	-
c_j-z_j		0	0	$-M$	0	$-M-1$	1		

Rozwiązanie w dalszym ciągu nie jest optymalne. Dodatni współczynnik optymalności odpowiada jedynie zmiennej s_2 i to ona wejdzie do bazy.
Nie możemy policzyć kryterium wyjścia dla zmiennej *x* gdyż nie bierzemy pod uwagę ujemnych elementów kolumny wyróżnionej (-2). A zatem wychodzi z bazy zmienna *y*.
Reasumując: zmienna s_2 wchodzi na miejsce *y*.

4. tablica simpleks:

x^B	c_j	1	1	$-M$	0	$-M$	0	WNB	KRYT. WYJ.
		x	y	t_1	s_1	t_2	s_2		
s_2	0	0	1	1	-1	-1	1	5	-
x	1	1	2	1	-1	0	0	10	-
c_j-z_j		0	-1	$-M-1$	1	$-M$	0		

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że rozwiązanie w dalszym ciągu nie jest optymalne. Znajdujemy bowiem zmienną, której odpowiada dodatni współczynnik optymalności (s_1). Zmienna ta powinna wejść do bazy. Nie znajdujemy jednak zmiennej wychodzącej z bazy (wszystkie elementy kolumny wyróżnionej są ujemne). Taka sytuacja oznacza to że nie możemy dalej wykonać iteracji a **rozwiązanie zadania a) jest nieograniczone**.

b) ROZWIĄZANIE:

Postać kanoniczna:

$$10x_1 + 15x_2 + Mt_1 + Mt_3 \to \min$$
$$x_1 + x_2 + t_1 - s_1 = 10$$
$$x_1 + x_2 + s_2 = 20$$
$$2x_1 + 4x_2 + t_3 - s_3 = 25$$
$$x_1, x_2, t_1, t_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

1. tablica simpleks:

x^B	c_j	10	15	M	0	0	M	0	WNB	KRYT. WYJ.
		x_1	x_2	t_1	s_1	s_2	t_3	s_3		
t_1	M	1	1	1	-1	0	0	0	10	10
s_2	*0*	1	1	0	0	1	0	0	20	20
t_2	M	2	4	0	0	0	1	-1	25	6,25
c_j-z_j		$10-3M$	$15-5M$	0	M	0	0	M		

Bieżące rozwiązanie nie jest optymalne, gdyż znajdują się zmienne którym odpowiadają ujemne współczynniki optymalności. Najniższy wskaźnik optymalności odpowiada zmiennej x_2 (znaczenie ma współczynnik przy *M*, a dopiero gdy to nie rozstrzyga stała – proszę sprawdzić np. podstawiając pod tą tablicę *M=1000*). Zmienna ta wejdzie do bazy na miejsce t_2 (najniższe kryterium wyjścia z bazy równe 6,25).

c.d. samodzielnie.

c) ROZWIĄZANIE:

Postać kanoniczna:

$$4x+5y \to \min$$
$$x+2y+s_1=10$$
$$2x+y+s_2=8$$
$$x,y,s_1,s_2 \geq 0$$

1. tablica simpleks:

x^B	c_j	4	5	0	0	WNB	KRYT. WYJ.
		x	y	s_1	s_2		
s_1	*0*	1	2	1	0	10	5
s_2	*0*	2	1	0	1	8	8
c_j-z_j		4	5	0	0		

Funkcja celu w bieżącej tablicy nie przyjmuje wartości optymalnej (maksymalnej), gdyż występują dodatnie współczynniki c_j-z_j. Wprowadzamy do bazy zmienną y (największe c_j-z_j) – w miejsce s_1 (najniższe kryterium wyjścia z bazy).
2. tablicę simpleks możemy tak jak zawsze. Początkowo musimy zadbać, aby zmienna y w pierwszym wierszu miała współczynnik = 1. W tym celu dzielimy pierwszy wiersz przez 2. Następnie chcemy otrzymać zero przy zmiennej y w drugim wierszu. Odejmujemy zatem od wiersza 2 wiersz 1. W rezultacie:

2. tablica simpleks:

x^B	c_j	4	5	0	0	WNB	KRYT. WYJ.
		x	y	s_1	s_2		
y	*5*	0,5	1	0,5	0	5	10
s_2	*0*	1,5	0	-0,5	1	3	2
c_j-z_j		1,5	0	-2,5	0		

Rozwiązanie w dalszym ciągu nie jest optymalne. Jedyną zmienną, która ma dodatni współczynnik jest x i właśnie ona wchodzi do bazy. Najniższe kryterium wyjścia ma s_2, dlatego ta zmienna opuści bazę.
Tablicę simpleks otrzymujemy następująco:
- podzielić drugi wiersz przez 1,5.
- następnie: odjąć od pierwszego wiersza połowę wiersza drugiego.

3. tablica simpleks:

x^B	c_j	4	5	0	0	WNB	KRYT. WYJ.
		x	y	s_1	s_2		
y	*5*	0	1	2/3	0	4	
x	*4*	1	0	-1/3	2/3	2	
c_j-z_j		0	0	-2	-2,67		

W tej tablicy osiągnęliśmy maksimum funkcji celu, zatem zadanie jest już optymalne. Rozwiązaniem jest y=4 i x=2.